

2. 故 $b=1, c=2$.

(2) 原不等式可化为 $ax^2 - (2a+1)x + 2 < 0 \Rightarrow (ax-1)(x-2) < 0$.

若 $a=0$, 则 $-x+2 < 0$, 解得 $x > 2$.

若 $a < 0$, 则 $(x - \frac{1}{a})(x-2) > 0$, 解得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 2$.

若 $a > 0$, 则 $(x - \frac{1}{a})(x-2) < 0$,

当 $\frac{1}{a} < 2$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 解得 $\frac{1}{a} < x < 2$;

当 $\frac{1}{a} = 2$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式无解;

当 $\frac{1}{a} > 2$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 解得 $2 < x < \frac{1}{a}$.

综上所述, 当 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 2\}$;

当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x > 2\}$;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid 2 < x < \frac{1}{a}\}$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式无解;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid \frac{1}{a} < x < 2\}$.

(3) 问题转化为 $(m+1)x^2 - (m-1)x + m - 1 \geq 0$ 对一切 $-\frac{1}{2} \leq$

$x \leq \frac{1}{2}$ 恒成立.

所以 $m(x^2 - x + 1) + x^2 + x - 1 \geq 0 \Rightarrow m(x^2 - x + 1) \geq -(x^2 + x - 1)$.

因为 $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ 恒成立,

所以 $m \geq -\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2})$.

$-\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = -\frac{(x^2 - x + 1) + 2(x - 1)}{x^2 - x + 1} = -1 - \frac{2(x - 1)}{x^2 - x + 1}$,

设 $x - 1 = t$, 则 $x = t + 1 (-\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2})$,

且 $-1 - \frac{2t}{(t+1)^2 - (t+1) + 1} = -1 - \frac{2t}{t^2 + t + 1} = -1 - \frac{2}{t + \frac{1}{t} + 1}$

$-1 + \frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1}$,

因为 $-t + \frac{1}{-t} \geq 2\sqrt{-t \cdot \frac{1}{(-t)}} = 2$, 当且仅当 $t = -1$ 时取 "=",

所以 $-t + \frac{1}{-t} - 1 \geq 1$, 所以 $\frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1} \leq 2$, 所以 $-1 +$

$\frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1} \leq 1$.

所以 $m \geq 1$, 故实数 m 的取值范围是 $\{m \mid m \geq 1\}$.

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

3.1.1 函数的概念

基础必刷

1. D 【解析】对于 A, 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $[0, 1]$, 与条件矛盾, A 错误;

对于 B, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, 1]$, 与条件矛盾, B 错误;

对于 C, 有一个自变量 x 对应两个 y 值的情况, 不是函数, 与条件矛盾, C 错误;

对于 D, 定义域为 $[-1, 0]$, 值域为 $[-1, 1]$, 符合条件, D 正确. 故选 D.

2. ABC 【解析】对选项 A: $y = |x|$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, 对应的值域为 $\{0, 1, 2\} \subseteq B$, 正确.

对选项 B: $y = x^2$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, 对应的值域为 $\{0, 1, 4\} \subseteq B$, 正确.

对选项 C: $y = x + 1$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, 对应的值域为 $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq B$, 正确.

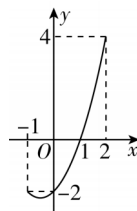
对选项 D: $y = 2x$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, 对应的值域为 $\{-2, 0, 2, 4\} \not\subseteq B$, 错误.

故选 ABC.

3. B 【解析】函数 $y = x^2 + x - 2$ 的图象的对称轴为直线 $x = -\frac{1}{2}$, 作出函数 $f(x) = x^2 + x - 2$, $x \in [-1, 2]$ 的图象, 观察图象

可知 $f(x)_{\max} = f(2) = 4$, $f(x)_{\min} = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$,

所以函数的值域为 $[-\frac{9}{4}, 4]$. 故选 B.



4. C 【解析】由题意得 $\begin{cases} 2+x \geq 0, \\ 16-x^2 > 0, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq x < 4$, 故定义域为 $[-2, 4)$. 故选 C.

5. C 【解析】对于 A, 函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 函数 $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 两个函数的定义域不同, 所以不是同一函数, 故 A 错误;

对于 B, 函数 $y = |x+1| + |x|$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

$$\text{函数 } y = \begin{cases} 2x+1, & x > 0, \\ 1, & -1 \leq x < 0, \\ -2x-1, & x < -1 \end{cases} \text{ 的定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

两个函数的定义域不同, 所以不是同一函数, 故 B 错误;

对于 C, 函数 $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2} = |x|$, 两个函数的定义域与对应关系都相同, 所以两个函数是同一函数, 故 C 正确;

对于 D, 函数 $y = |x|$ 的定义域为 \mathbf{R} , 函数 $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 两个函数的定义域不同, 所以不是同一函数, 故 D 错误. 故选 C.

6. ABD 【解析】对于 A, 对 $y = \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}$, 有 $\begin{cases} 1+x \geq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq x \leq 1$, 即定义域为 $[-1, 1]$,

对 $y = \sqrt{1-x^2}$, 有 $1-x^2 \geq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq 1$, 即定义域为 $[-1, 1]$,

又 $y = \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{1-x^2}$, 故 $y = \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}$ 与 $y = \sqrt{1-x^2}$ 表示同一个函数, 故 A 正确;

对于 B, 函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $(-1, 2)$, 即 $x \in (-1, 2)$, 则有 $2x-1 \in (-3, 3)$, 故 $-3 < 1-x < 3$, 解得 $-2 < x < 4$, 故函数 $f(1-x)$ 的定义域为 $(-2, 4)$, 故 B 正确;

对于 C, 由 $x > 3$, 得 $x-1 > 2$, 则 $y = 2x + \frac{4}{x-1} - 1 = 2(x-1) + \frac{4}{x-1} + 1$,

令 $t = x-1 > 2$, 由于函数 $y = 2t + \frac{4}{t}$ 在 $(2, +\infty)$ 上时, y 随 t 的增大而增大,

故 $y = 2x + \frac{4}{x-1} - 1 = 2(x-1) + \frac{4}{x-1} + 1 > 2 \times 2 + \frac{4}{2} + 1 = 7$, 故 C 错误;

对于 D, 令 $t = \sqrt{1-x} \geq 0$, 则 $x = 1-t^2$,

故 $f(x) = x+2\sqrt{1-x}$ 可转化为 $y = 1-t^2+2t = -(t-1)^2+2 \leq 2$,

当且仅当 $t=1$ 时, 等号成立, 故函数 $f(x) = x+2\sqrt{1-x}$ 的值域为 $(-\infty, 2]$, 故 D 正确.

故选 ABD.

7. 15 【解析】方法一: 令 $x-1=t$, 则 $x=t+1$,

$$f(t) = (t+1)^2 + 2(t+1) = t^2 + 4t + 3,$$

$$\text{即 } f(2) = 2^2 + 4 \times 2 + 3 = 15.$$

方法二: 直接令 $x-1=2$, 即 $x=3$, 得 $f(2) = 3^2 + 2 \times 3 = 15$.

8. $-\frac{11}{4}$ 【解析】由函数的解析式可得 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1} +$

$$\frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{1-x} = -1, x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 1,$$

$$\text{故 } f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) + f(3) + f(4) = -3, \text{ 且 } f(5) =$$

$$\frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}, \text{ 故 } f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = -3 + \frac{1}{4} = -\frac{11}{4}.$$

刷易错

易错点 1 不能正确理解函数的定义

9. C 【解析】集合 $P = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, 集合 $Q = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$.

对于 A, $f: x \rightarrow y = \frac{1}{2}x$, 由 $0 \leq x \leq 4$, 可得 $0 \leq y \leq 2$, 故能构成从 P 到 Q 的函数, 选项 A 不符合题意;

对于 B, $f: x \rightarrow y = \sqrt{x}$, 由 $0 \leq x \leq 4$, 可得 $0 \leq y \leq 2$, 故能构成从 P 到 Q 的函数, 选项 B 不符合题意;

对于 C, $f: x \rightarrow y = \frac{2}{3}x$, 由 $x=4$, 可得 $y = \frac{8}{3} > 2$, 故不能构成从 P 到 Q 的函数, 选项 C 符合题意;

对于 D, $f: x \rightarrow y = \frac{1}{8}x^2$, 由 $0 \leq x \leq 4$, 可得 $0 \leq y \leq 2$, 故能构成从 P 到 Q 的函数, 选项 D 不符合题意. 故选 C.

易错警示

判断两个集合 A, B 在 $f: A \rightarrow B$ 对应关系下能否构成函数, 主要是判断集合 A 中的每一个元素是否在集合 B 中有唯一确定的元素与之对应, 而对集合 B 中的元素没有特殊要求, 只要集合 B 与集合 A 都是非空数集即可. 因此 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作 $y = f(x)$, $x \in A$, 且函数的值域应是集合 B 的子集.

易错点 2 函数的定义域、值域必须是集合或区间的形式

10. $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ 【解析】 \because 函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $[-2, 3]$,

$\therefore -1 \leq x+1 \leq 4, \therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 4]$. 令 $-1 \leq x-1 \leq 4$, 解得 $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$.

易错警示

由于函数的定义域、值域均为集合或区间的形式, 因此在填空题中, 必须将函数的定义域、值域写成集合或区间的形式, 否则是错误的, 如将本题答案写成 $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$, 就是错误的.

11. $[2, +\infty)$ 【解析】函数 $y = \sqrt{x-1}$ 的定义域为 $A = [1, +\infty)$, 函数 $y = x^2+2$ 的值域为 $B = [2, +\infty)$, 则 $A \cap B = [2, +\infty)$.

易错点 3 正确理解同一个函数的概念

12. C 【解析】对于 A, $f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$ 的定义域为 \mathbf{R} , $g(x) = |x|$ 的定义域为 \mathbf{R} , 它们的定义域相同, 但对应关系不同, 不是同一个函数;

对于 B, $f(x) = x$ 的定义域为 \mathbf{R} , $g(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ 的定义域为 $\{x|x \neq 1\}$, 它们的定义域不同, 不是同一个函数;

对于 C, $f(x) = |x-2|$ 的定义域为 \mathbf{R} , $g(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 2, \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 它们的定义域相同, 且对应关系也相同, 故它们是同一个函数;

对于 D, $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ 的定义域为 $\{x|x \geq 1\}$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $\{x|x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$, 它们的定义域不同, 不是同一个函数. 故选 C.

易错警示 判断两个函数是不是同一个函数, 主要是判断两函数的定义域与对应关系是否相同, 只有当两函数的定义域相同、对应关系相同时, 函数的值域才相同, 两个函数才为同一个函数.

易错点 4 求函数定义域时, 非等价变形而致误

13. 【解】 (1) $f(x)$ 的定义域满足 $\begin{cases} x+2 \neq 0, \\ -x^2-3x+4 \geq 0, \\ |x+2|-3 \neq 0, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x \neq -2, \\ -4 \leq x \leq 1, \\ x \neq 1 \text{ 且 } x \neq -5, \end{cases} \quad \text{即得 } -4 \leq x < 1 \text{ 且 } x \neq -2,$$

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|-4 \leq x < -2 \text{ 或 } -2 < x < 1\}$.

$$(2) f(-1) = \frac{1+\sqrt{6}}{-2} = -\frac{1+\sqrt{6}}{2}.$$

易错警示 求函数的定义域时, 一定要根据函数解析式的特征列出满足题意的条件, 不要将函数解析式变形后求解, 如本题中, 若将函数解析式化简为 $f(x) = \frac{1+\sqrt{-x^2-3x+4}}{|x+2|-3}$ 再去求定义域, 就对函数解析式做了非等价变形, 导致求解错误.

易错点 5 混淆函数的定义域与函数在某区间上有意

14. 【解】 由 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 可得 $ax^2+ax+1 > 0$ 恒成立.

当 $a=0$ 时, $ax^2+ax+1 = 1 > 0$ 恒成立;

当 $a \neq 0$ 时, 需满足 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = a^2 - 4a < 0, \end{cases}$ 解得 $0 < a < 4$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $[0, 4)$.

15. 【解】 $\because ax-2 \geq 0, a > 0, \therefore x \geq \frac{2}{a}$, 即函数的定义域为

$$\left[\frac{2}{a}, +\infty\right). \text{ 由函数在区间 } [1, +\infty) \text{ 上有意义, 得 } [1, +\infty) \subseteq \left[\frac{2}{a}, +\infty\right), \text{ 即 } \frac{2}{a} \leq 1. \text{ 又 } a > 0, \therefore a \geq 2, \therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } [2, +\infty).$$

易错警示 “函数在某区间 I 上有意义”与“函数的定义域是 I ”是不同的, 前者的区间 I 是函数定义域的子集, 而后者 I 就是函数的定义域. 另外如本题中, 求实数 a 的取值范围列不等式时, 不要忘记区间端点相等的情况.

3.1.2 函数的表示法

基础必刷

1. A 【解析】由题表知, $f(1) = 2, \therefore f(f(1)) = f(2) = -1$. 故选 A.

2. D 【解析】将容器看作一个球体, 在刚开始注水时, 由于球体的截面面积较小, 则对于相同时间的变化量, 高度 h 的变化越来越慢, 到水注入球体的一半时, 由于球体的截面面积较大, 则 $f(t)$ 的变化率较小, 达到了最小值, 在水接近于球体的顶端时, $f(t)$ 的变化率又较大. 故选 D.

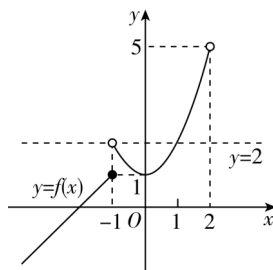
3. BCD 【解析】A 选项, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 2)$, A 错误.

B 选项, 当 $x \leq -1$ 时, $x+2 \leq 1$, 当 $-1 < x < 2$ 时, $0 \leq x^2 < 4$, 则 $1 \leq x^2+1 < 5$, 所以 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, 5)$, B 正确.

C 选项, 由 B 选项的分析可知, 若 $f(x) = 3$, 则 $\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x^2+1 = 3, \end{cases}$ 解得

$x = \sqrt{2}$, C 正确.

D 选项, 画出 $f(x)$ 的图象如图, 由图可知, D 正确. 故选 BCD.



4. 12 【解析】令 $x=y=1$, 则 $f(1+1) = f(1) + f(1) + 2 \times 1 \times 1$,

$$\therefore f(1) = 2, \therefore f(2) = 6.$$

$$\text{令 } x=2, y=1, \text{ 则 } f(2+1) = f(2) + f(1) + 2 \times 2 \times 1,$$

$$\therefore f(3) = 6+2+4 = 12.$$

5. $\frac{1}{x-5}-1$ (答案不唯一) 【解析】因为函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为

$\{x|x \neq 0\}$, 值域为 $\{y|y \neq 0\}$, 其图象关于点 $(0, 0)$ 中心对称,

所以函数 $f(x) = \frac{1}{x-5}-1$ 的定义域为 $\{x|x \neq 5\}$, 值域为 $\{y|y \neq$

$-1\}$, 故答案可以为 $\frac{1}{x-5}-1$ (答案不唯一).

6. 【解】(1) 因为 $f\left(\frac{1}{x}+1\right) = \frac{1}{x^2} - 1 = \left(\frac{1}{x}+1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}+1\right)$,

所以 $f(x) = x^2 - 2x$.

因为 $\frac{1}{x} \neq 0$, 所以 $\frac{1}{x} + 1 \neq 1$, 所以 $f(x) = x^2 - 2x (x \neq 1)$.

(2) 因为 $f(x) - 2f(-x) = 9x + 2$, 所以令 $-x$ 替换 x , 可得 $f(-x) -$

$$2f(x) = -9x + 2, \text{ 则 } \begin{cases} f(x) - 2f(-x) = 9x + 2, \\ f(-x) - 2f(x) = -9x + 2, \end{cases}$$

解得 $f(x) = 3x - 2$.

刷易错

易错点 1 求函数解析式时忽视函数的定义域而致误

7. B 【解析】已知 $f(\sqrt{x}-1) = x - 2\sqrt{x} - 1$,

令 $t = \sqrt{x} - 1 (t \geq -1)$, 则 $\sqrt{x} = t + 1, x = (t + 1)^2$,

$$\therefore f(t) = (t + 1)^2 - 2(t + 1) - 1 = t^2 - 2 (t \geq -1),$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2 (x \geq -1). \text{ 故选 B.}$$

8. $f(x) = x^2 - x + 3 (x \neq 1)$ 【解析】令 $1 + \frac{1}{x} = t$, 则 $\frac{1}{x} = t - 1 (t \neq$

1), 所以 $f(t) = (t - 1)^2 + t - 1 + 3 = t^2 - t + 3 (t \neq 1)$, 即

$$f(x) = x^2 - x + 3 (x \neq 1).$$

易错警示

已知函数 $y = f(g(x))$ 的解析式, 求函数 $y = f(x)$ 的解析式时, 若函数 $y = g(x)$ 的值域不是全体实数, 则所求得的函数 $y = f(x)$ 的解析式必须带有定义域 (即函数 $y = g(x)$ 的值域), 如 7 题中函数 $y = f(x)$ 的定义域就是 $y = \sqrt{x} - 1$ 的值域, 而 8 题中, 若只将答案写成 $f(x) = x^2 - x + 3$, 也是错误的.

易错点 2 不能正确理解分段函数

9. C 【解析】当 $x \leq 0$ 时, 由 $x^2 + 1 = 10$ 得 $x = -3$ 或 $x = 3$ (舍); 当 $x > 0$ 时, 由 $-2x = 10$ 得 $x = -5$ (舍). 综上 $x = -3$. 故选 C.

10. A 【解析】 $f(1) = 1 - 4 + 6 = 3$.

当 $x \geq 0$ 时, 令 $x^2 - 4x + 6 > 3$, 解得 $0 \leq x < 1$ 或 $x > 3$;

当 $x < 0$ 时, 令 $x + 6 > 3$, 解得 $-3 < x < 0$.

所以不等式 $f(x) > f(1)$ 的解集是 $(-3, 1) \cup (3, +\infty)$.

故选 A.

易错警示

求解分段函数问题, 必须根据自变量的范围找到相应的解析式, 而对于含参数的分段函数求值问题, 则应根据参数的范围分类讨论. 如 9 题与 10 题中分类讨论的标准就是分段函数各段的自变量的范围.

3.2 函数的基本性质

3.2.1 单调性与最大(小)值

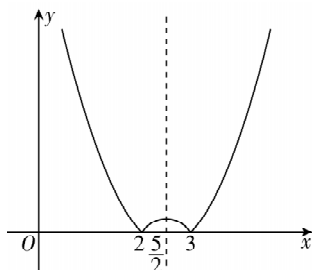
课时 1 函数的单调性

基础必刷

1. D 【解析】选项 A 中, “存在” 应为 “任意”, 故 A 错误; 选项 B 中, “无穷” 应为 “任意”, 故 B 错误; 选项 C 中, 在 $A \cup B$ 上不一定成立, 故 C 错误; 由函数单调性的定义知, 选项 D 正确.

2. C 【解析】因为函数 $y = x^2 - 5x + 6$ 的图象的对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$,

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 可得 $x = 2$ 或 $x = 3$, 所以作出函数 $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ 的图象如图所示.



由图可知, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(2, \frac{5}{2})$ 和 $(3, +\infty)$.

故选 C.

3. C 【解析】 $f(x) = |x + 2| + x - 3 = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq -2, \\ -5, & x < -2, \end{cases}$

又 $f(a) > f(3 - 2a)$, 则有 $\begin{cases} a > 3 - 2a, \\ a > -2, \end{cases}$ 解得 $a > 1$, 故选 C.

4. C 【解析】当 $x < 0$ 时, $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 单调递增 (增函数 - 减函数 = 增函数), 只有选项 C 满足. 故选 C.

5. A 【解析】因为函数 $f(x)$ 满足对任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立,

所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

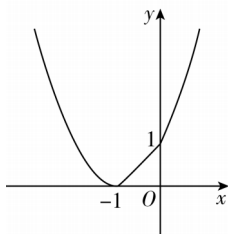
$$\text{则有 } \begin{cases} 2a - 1 > 0, \\ \frac{a}{2} \leq 1, \\ (2a - 1) + 4a \leq 1^2 - a + 5, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1}{2} < a \leq 1, \text{ 即 } a \in$$

$(\frac{1}{2}, 1]$. 故选 A.

6. ACD 【解析】由 $(x + 1)^2 \geq x + 1$ 得 $x(x + 1) \geq 0$, 解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 0$, 由 $(x + 1)^2 < x + 1$ 得 $x(x + 1) < 0$, 解得 $-1 < x < 0$.

$$\text{所以 } f(x) = (x + 1) \oplus (x + 1)^2 = \begin{cases} (x + 1)^2, & x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 0, \\ x + 1, & -1 < x < 0, \end{cases}$$

作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



对于 A 选项,易知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , A 正确;

对于 B 选项,由图可知, $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, B 错误;

对于 C 选项,由图可知,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1]$, C 正确;

对于 D 选项,当 $x \leq -1$ 或 $x \geq 0$ 时,由 $f(x) = (x+1)^2 > 1$,可得 $x^2 + 2x > 0$,解得 $x < -2$ 或 $x > 0$.

当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) = x + 1 \in (0, 1)$,此时,不等式 $f(x) > 1$ 无解.

综上所述,不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$, D 正确.

故选 ACD.

7. ABD 【解析】对于 A 项,由 $f\left(\frac{x}{y}\right) = yf(x) - xf(y)$,取 $x = y = 1$,得 $f(1) = f(1) - f(1) = 0$,故 A 正确;

对于 B 项,由 $f\left(\frac{x}{y}\right) = yf(x) - xf(y)$,取 $x = 1$,因为 $f(1) = 0$,

所以 $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$,即 $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$,当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{x} > 1$,则 $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$,故 $-f(x) > 0$,即 $f(x) < 0$,故 B 正确;

对于 C 项,由 $f\left(\frac{x}{y}\right) = yf(x) - xf(y)$,取 $x = y^2$,可得 $f(y) = yf(y^2) - y^2f(y)$,整理得 $f(y^2) = \left(y + \frac{1}{y}\right)f(y)$,

又 $y > 0$,则 $y + \frac{1}{y} \geq 2$,当且仅当 $y = 1$ 时取等号,但 $f(y)$ 的符号不能确定,故不一定有 $f(y^2) \geq 2f(y)$,即 $f(x^2) \geq 2f(x)$ 不一定成立,故 C 错误;

对于 D 项,任取 $x_1 > x_2 > 1$,则 $\frac{x_1}{x_2} > 1$,依题意, $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) > 0$,而 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = x_2f(x_1) - x_1f(x_2)$,

则 $x_2f(x_1) - x_1f(x_2) > 0$,即 $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$,即 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

在 $(1, +\infty)$ 上是增函数.

于是,对 $f(x) = xg(x)$,

任取 $x_1 > x_2 > 1$,因为 $g(x_1) > g(x_2) > 0$,所以 $x_1g(x_1) > x_2g(x_2)$,即 $f(x_1) > f(x_2)$,

即函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,故 D 正确.

故选 ABD.

8. 2 025 【解析】依题意,令 $f(x) - x = t$,则 $f(t) = 2$,由函数 $f(x)$

在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,得 $t \geq 0$,且 t 为常数,

则 $f(x) = x + t$,则 $f(t) = 2t = 2$,解得 $t = 1$,因此 $f(x) = x + 1$,

所以 $f(2\ 024) = 2\ 025$.

9. $(1, +\infty)$ 【解析】任取 $x_1 < x_2$,从而 $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1 + x_1) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) - 1$,

因为 $x_2 - x_1 > 0$,所以 $f(x_2 - x_1) > 1$,

所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0$,则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.

不等式 $f(x) + f(4 - 3x) < 6$ 等价于不等式 $f(x) + f(4 - 3x) - 1 < 5$,即 $f(x + 4 - 3x) < f(2)$.

因为 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,所以 $4 - 2x < 2$,解得 $x > 1$.

10. 【解】(1) 由函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ 可得, $f(2) = 2^2 + \frac{a}{2} = 4 + \frac{a}{2}$.

(2) 取任意 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$,且 $x_1 > x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 + \frac{a}{x_1} - \left(x_2^2 + \frac{a}{x_2}\right)$$

$$= x_1^2 - x_2^2 + \frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2}$$

$$= (x_1 - x_2) \left[\frac{(x_1 + x_2)x_1x_2 - a}{x_1x_2} \right],$$

因为函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

因为 $x_1 > x_2 > 1$,所以 $x_1 - x_2 > 0, x_1x_2 > 0$,

所以 $(x_1 + x_2)x_1x_2 - a > 0$,

即当 $x_1 > x_2 > 1$ 时, $a < (x_1 + x_2)x_1x_2$ 恒成立.

又 $x_1 + x_2 > 2, x_1x_2 > 1$,

所以 $(x_1 + x_2)x_1x_2 > 2$,

所以要使 $a < (x_1 + x_2)x_1x_2$ 恒成立,则 $a \leq 2$,

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

(3) 由(1)可知, $f(2) = 4 + \frac{a}{2}$,

所以不等式 $f\left(\frac{2ax}{x-2}\right) > 4 + \frac{a}{2}$ 可化为 $f\left(\frac{2ax}{x-2}\right) > f(2)$.

由函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ 的定义域为 $(1, +\infty)$,可得 $\frac{2ax}{x-2} > 1$.

当 $a = 0$ 时, $f\left(\frac{2ax}{x-2}\right)$ 无意义,故不等式的解集为 \emptyset ;

当 $0 < a < 1$ 时,由(2)知, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\frac{2ax}{x-2} > 2$.

由 $0 < a < 1$,可得 $-1 < a - 1 < 0$,则 $0 < 1 - a < 1$,则 $\frac{2}{1-a} > 2$,

$$\text{则不等式 } \frac{2ax}{x-2} > 2 \Leftrightarrow \frac{2[(a-1)x+2]}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{2}{1-a}}{x-2} < 0 \Leftrightarrow 2 < x < \frac{2}{1-a},$$

故不等式的解集为 $\left(2, \frac{2}{1-a}\right)$.

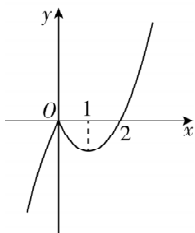
综上所述,当 $a=0$ 时,不等式的解集为 \emptyset ;

当 $0 < a < 1$,不等式的解集为 $\left(2, \frac{2}{1-a}\right)$.

刷易错

易错点 1 函数有多个相同的单调区间时要注意写法

11. B 【解析】 $f(x) = |x|(x-2)$ 可化为 $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & x \geq 0, \\ 2x-x^2, & x < 0, \end{cases}$ 结合函数图象可知函数的单调递增区间是 $(-\infty, 0), (1, +\infty)$. 故选 B.



易错警示 对某一函数 $y=f(x)$,它在区间 (a, b) 与 (c, d) 上都单调递增(减),不能说 $y=f(x)$ 在 $(a, b) \cup (c, d)$ 上一定单调递增(减),各个区间之间只能用“,”或“和”连接,而不能用“ \cup ”或“或”连接.

易错点 2 忽视函数的定义域

12. C 【解析】令 $y=1$,则 $f(x)=f(x)+f(1)-1$,得 $f(1)=1$,所以由 $f(x-1)>1$ 得 $f(x-1)>f(1)$. 又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,所以 $\begin{cases} x-1>0, \\ x-1<1, \end{cases}$ 解得 $1 < x < 2$. 故选 C.

易错警示 若函数的定义域不是全体实数,则应用函数单调性求解不等式时,不要忘记函数定义域的限制.

13. $[-1, 1]$ 【解析】令 $-x^2+2x+3 \geq 0$,解得 $-1 \leq x \leq 3$,故函数的定义域为 $[-1, 3]$.

令 $u = -x^2+2x+3 = -(x-1)^2+4$,

故 $u = -(x-1)^2+4$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,在 $(1, 3]$ 上单调递减,

又 $y = \sqrt{u}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

由复合函数的单调性可知, $y = \sqrt{-x^2+2x+3}$ 的单调递增区间为 $[-1, 1]$.

易错警示 求解复合函数的单调性问题一定要注意函数的定义域. 求解本题的易错之处,一是忽视函数的定义域,二是不能正确理解复合函数的单调性的判断法则.

易错点 3 不能正确理解“单调区间”和“在区间上单调”这两个概念

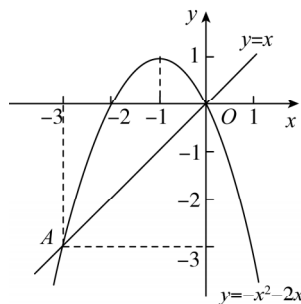
14. (1) -3 (2) $(-\infty, -3]$ 【解析】(1) 因为函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 4]$,且函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=1-a$,所以 $1-a=4$,即 $a=-3$.

(2) 因为函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上单调递减,且函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=1-a$,所以 $1-a \geq 4$,即 $a \leq -3$.

易错警示 函数的单调区间与函数在某区间上单调不是一个概念,说函数的单调区间是 I ,指的是函数单调区间的最大范围为区间 I . 而函数在某一区间上单调,则指此区间是相应单调区间的子区间.

易错点 4 忽视分段函数定义域的分界点而致误

15. $(-\infty, -3]$ 【解析】在同一平面直角坐标系下,作出函数 $y = -x^2-2x$ 与 $y=x$ 的图象,如图所示.



当 $-x^2-2x=x$ 时, $x=-3$ 或 $x=0$,由图可知若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2-2x, & x \leq m, \\ x, & x > m \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,则需要 $m \leq -3$. 故实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -3]$.

易错警示 对于分段函数在定义域上的单调递增(减)的问题,除了保证在定义域的每一个区间上单调性相同之外,还要考虑在分界点处的函数值的大小关系,若函数是增函数,则分界点处的函数值左边不大于右边;若函数是减函数,则分界点处的函数值右边不大于左边,否则求出的参数范围会出现错误.

课时 2 函数的最大(小)值

基础必刷

1. D 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的减函数,所以 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有最大值 $f(a)$, $f(x)+c$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 $f(a)+c$, $f(x)-c$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 $f(a)-c$, $cf(x)$ ($c < 0$) 在 $[a, b]$ 上有最小值 $cf(a)$, 故选 D.

2. B 【解析】 $y = \frac{3x^2+5}{x^2-2} = 3 + \frac{11}{x^2-2}$, $x \in [-4, -2)$,

当 $x \in [-4, -2)$ 时, $x^2 \in (4, 16]$, 则 $x^2-2 \in (2, 14]$, $\frac{11}{x^2-2} \in$

$\left[\frac{11}{14}, \frac{11}{2}\right)$, 则 $3 + \frac{11}{x^2-2} \in \left[\frac{53}{14}, \frac{17}{2}\right)$. 故选 B.

3. A 【解析】由题意,函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2-ax+1, & x \geq 0, \\ -x-\frac{1}{x}+a, & x < 0, \end{cases} y = 2x^2-ax+$

1 图象的对称轴为直线 $x = \frac{a}{4}$, 当 $x \geq 0$ 时,若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的

最小值,

则 $\frac{a}{4} \leq 0$, 即 $a \leq 0$, 可得 $f(0) = 1$.

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 则 $-x - \frac{1}{x} + a \geq 2\sqrt{(-x) \times \left(-\frac{1}{x}\right)} + a = 2 + a$, 当且仅当 $x = -1$ 时等号成立,

要使得函数的最小值为 $f(0)$, 则 $1 \leq 2 + a$, 解得 $a \geq -1$.

综上可得, 实数 a 的取值范围为 $[-1, 0]$.

故选 A.

4. AC 【解析】 $y = 4 + 2x - x^2$ 在 $x \in [-3, 3]$ 上的最大值为 5,

令 $4 + 2x - x^2 = 4$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 0$,

所以当 $x \in (0, 2)$ 时, $y = 4 + 2x - x^2 > 4$,

所以要使函数 $f(x)$ 的最大值为 4, 则根据定义可知,

当 $t \leq 1$ 时, $|2 - t| = 4$, 此时解得 $t = -2$, 符合题意;

当 $t > 1$ 时, $|0 - t| = 4$, 此时解得 $t = 4$, 符合题意.

故选 AC.

5. ACD 【解析】 $f(x) = \frac{4x+3}{x-1} = \frac{4(x-1)+7}{x-1} = 4 + \frac{7}{x-1}$, 定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$,

借助反比例函数的单调性易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ 上都单调递减.

对于 A: $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ 上没有最大值, 也没有最小值, A 正确;

对于 B: 当 $x \geq 2$ 时, $f(x) > 0$, 故 B 错误;

对于 C: 当 $x \leq -6$ 时, $f(x)$ 单调递减且 $f(-6) = 3$,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{7}{x-1} \rightarrow 0$, 且小于 0, 所以当 $x \leq -6$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[3, 4)$, 故 C 正确;

对于 D: 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f(x)$ 单调递减, $f(0) = -3$, 当 $x \rightarrow 1$ 且 $x < 1$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$,

当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \rightarrow 1$ 且 $x > 1$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 4$, 故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -3] \cup (4, +\infty)$, 故 D 正确.

故选 ACD.

6. $\sqrt{6}$ 【解析】要使函数有意义, 则 $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ x^2 + x - 6 \geq 0, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1, \\ x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -3, \end{cases}$ 故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -3\}$.

由于函数 $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, $y = \sqrt{x^2 + x - 6}$ 都在区间 $(-\infty, -3]$ 上单调递减, 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 故函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(-3)$ 或 $f(3)$. 因为 $f(-3) = 2\sqrt{3}$, $f(3) = \sqrt{6}$, $2\sqrt{3} > \sqrt{6}$, 所以函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x^2 + x - 6}$ 的最小值为 $\sqrt{6}$.

7. -3, 3 【解析】因为函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, 函数图象的对称轴为直线 $x = 1$, 开口向上, 又 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2]$ 上的最小值为 4,

所以当 $a \geq 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(a) = (a-1)^2 = 4$, 解得 $a = -1$ (舍去) 或 $a = 3$;

当 $a+2 \leq 1$, 即 $a \leq -1$ 时, $f(x)_{\min} = f(a+2) = (a+1)^2 = 4$, 解得 $a = 1$ (舍去) 或 $a = -3$;

当 $a < 1 < a+2$, 即 $-1 < a < 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 0 \neq 4$.

综上, 实数 a 的可能取值为 -3, 3.

8. $(-\infty, 1]$ 【解析】由 $f(x) = x^2 - 2ax + 2$ 可知, 函数图象的对称轴为直线 $x = a$,

当 $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} - a$,

所以要使 $f(x) \geq a$ 恒成立, 需满足 $f(x)_{\min} \geq a$, 所以

$$\begin{cases} \frac{9}{4} - a \geq a, \\ a \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{解得 } a \leq \frac{1}{2};$$

当 $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时, $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, a\right)$ 上单调递减, 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(a) = 2 - a^2$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 2 - a^2 \geq a, \\ a > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{1}{2} < a \leq 1.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

9. 【解】(1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 2, \\ -x^2 + 2x, & x < 2, \end{cases}$

当 $x < 2$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x \geq x$, 解得 $0 \leq x \leq 1$;

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = x^2 - 2x \geq x$, 解得 $x \geq 3$.

综上, 所求解集为 $[0, 1] \cup [3, +\infty)$.

(2) $y = x|x-a| = |x^2 - ax|$,

(i) 当 $f(1) = |1-a| = 2$ 时, $a = -1$ 或 $a = 3$,

当 $a = -1$ 时, $f(x) = |x^2 + x|$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 $f(2) = 6$, 不符合题意, 舍去;

当 $a = 3$ 时, $f(x) = |x^2 - 3x|$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$, 不符合题意, 舍去;

(ii) 当 $f(2) = |4-2a| = 2$ 时, $a = 1$ 或 $a = 3$ (舍),

当 $a = 1$ 时, $f(x) = |x^2 - x|$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值 $f(2) = 2$, 符合题意.

(iii) 当 $f\left(\frac{a}{2}\right) = \left|\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right| = \left|\frac{a^2}{4}\right| = 2$, 且 $\frac{a}{2} \in [1, 2]$, 解得 $a = 2\sqrt{2}$,

此时 $f(x) = |x^2 - 2\sqrt{2}x|$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 $f(\sqrt{2}) = 2$, 符合题意.

综上可得, $a = 1$ 或 $2\sqrt{2}$.

(3) ①当 $a \leq 1$ 时, 在区间 $[1, 2]$ 上,

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$, 又 $y = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ 的图象是开

口向上的抛物线, 对称轴是直线 $x = \frac{a}{2}$,

$\therefore a \leq 1, \therefore \frac{a}{2} \leq \frac{1}{2} < 1, \therefore f(x)_{\min} = f(1) = 1 - a$.

②当 $1 < a < 2$ 时, 在区间 $[1, 2]$ 上, $f(x) = x|x - a| \geq 0$, $f(x)_{\min} = 0$.

③当 $a \geq 2$ 时, 在区间 $[1, 2]$ 上,

$f(x) = -x^2 + ax = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$, 又 $y = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$ 的图象

是开口向下的抛物线, 对称轴是直线 $x = \frac{a}{2}$,

1° 当 $1 \leq \frac{a}{2} < \frac{3}{2}$, 即 $2 \leq a < 3$ 时, $f(x)_{\min} = f(2) = 2a - 4$.

2° 当 $\frac{a}{2} \geq \frac{3}{2}$, 即 $a \geq 3$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = a - 1$.

$$\therefore f(x)_{\min} = \begin{cases} 1-a, & a \leq 1, \\ 0, & 1 < a < 2, \\ 2a-4, & 2 \leq a < 3, \\ a-1, & a \geq 3. \end{cases}$$

刷易错

易错点 1 不能正确理解函数最值概念而致误

10. A 【解析】 $f(x)$ 的值域为 $[a, b]$, 即最小的函数值为 $f(x)_{\min} = a$, 最大的函数值为 $f(x)_{\max} = b$, 故 A 正确. $f(x)_{\min} = a, f(x)_{\max} = b$, 区间 $[a, b]$ 上的某些元素可能不是函数值, 因而 $[a, b]$ 不一定是值域, 故 B 错误. 若 $f(x)_{\min} = a$, 由函数最小值的定义可知一定存在 x_0 使 $f(x_0) = a$, 即 $f(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 一定有交点, 但不一定仅有一个交点, 故 C, D 都错误. 故选 A.

11. D 【解析】根据函数最小值的概念可知, 此函数的最小值不能确定. 故选 D.

易错警示 理解函数的最值必须明确函数最大(小)值一定是值域的元素.

易错点 2 含参数的一次函数、二次函数最值问题忽视分类讨论致误

12. C 【解析】当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值为 $f(2) = 2a + 1$, 最小值为 $f(1) = a + 1, \therefore (2a + 1) - (a + 1) = 2$, 解得 $a = 2$.

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值为 $f(1) = a + 1$, 最小值

为 $f(2) = 2a + 1, \therefore (a + 1) - (2a + 1) = 2$, 解得 $a = -2$.

综上所述, $a = 2$ 或 $a = -2$. 故选 C.

易错警示

涉及函数 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$ 的单调性或最值时, 若 k 的值符号不确定, 则必须对 k 进行分类讨论, 本题的易错之处是忽视对一次项系数的讨论, 而认为函数是增函数或减函数中的一种而造成错解.

13. -2 或 -4 【解析】二次函数 $f(x) = x^2 + ax$ 的图象的对称轴为直线 $x = -\frac{a}{2}$,

当 $-\frac{a}{2} \leq 0$, 即 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上单调递增,

所以 $M = f(3) = 9 + 3a, m = f(0) = 0$, 由 $M - m = 4$, 得 $9 + 3a - 0 = 4 \Rightarrow a = -\frac{5}{3}$, 不满足 $a \geq 0$, 舍去;

当 $-\frac{a}{2} \geq 3$, 即 $a \leq -6$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上单调递减,

所以 $M = f(0) = 0, m = f(3) = 9 + 3a$, 由 $M - m = 4$, 得 $0 - (9 + 3a) = 4 \Rightarrow a = -\frac{13}{3}$, 不满足 $a \leq -6$, 舍去;

当 $0 < -\frac{a}{2} < 3$, 即 $-6 < a < 0$ 时, $m = f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

若 $0 < -\frac{a}{2} \leq \frac{3}{2}$, 即 $-3 \leq a < 0$, 则 $M = f(3) = 9 + 3a$,

由 $M - m = 4$, 得 $9 + 3a + \frac{a^2}{4} = 4 \Rightarrow a = -2$ 或 $a = -10$ (舍去).

若 $\frac{3}{2} < -\frac{a}{2} < 3$, 即 $-6 < a < -3$, 则 $M = f(0) = 0$,

由 $M - m = 4$, 得 $\frac{a^2}{4} = 4 \Rightarrow a = -4$ 或 $a = 4$ (舍去).

综上所述, $a = -2$ 或 $a = -4$.

易错警示

求解含参数的二次函数在给定区间的最值问题, 应按照二次函数图象的对称轴与区间的相对位置关系分类讨论后求其最值. 对于解析式含绝对值的函数问题, 应先去掉绝对值符号, 化简函数解析式, 转化为二次函数等函数在给定区间的最值问题, 分类讨论求解.

14. 【解】(1) 因为二次函数 $y = f(x)$ 满足 $f(0) = f(8) = 0$, 且 $f(4) = 16$,

所以函数图象的对称轴为直线 $x = 4$, 且 $f(x)$ 的最大值为 16,

可设函数 $f(x) = a(x - 4)^2 + 16, a < 0$, 根据 $f(0) = 16a + 16 = 0$, 解得 $a = -1$,

故 $f(x) = -(x - 4)^2 + 16 = -x^2 + 8x$.

(2) 函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = 4$, 要使函数在区间 $[t, t + 2]$ 上不单调, 则 $4 \in (t, t + 2)$,

即 $t < 4 < t + 2$, 得 $\begin{cases} t < 4, \\ t + 2 > 4, \end{cases}$ 解得 $2 < t < 4$, 所以 t 的取值范围

为(2,4).

(3)由(1)知,函数图象的对称轴为直线 $x=4$,且抛物线开口向下,

当 $t \geq 4$ 时,函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上单调递减.此时最大值 $h(t)=f(t)=-t^2+8t$;

当 $t+2 \leq 4$,即 $t \leq 2$ 时,函数 $y=f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上单调递增,此时最大值 $h(t)=f(t+2)=-t^2+4t+12$;

当 $t < 4 < t+2$,即 $2 < t < 4$ 时,函数 $y=f(x)$ 在 $[t, 4]$ 上单调递增,在 $[4, t+2]$ 上单调递减,

此时最大值 $h(t)=f(4)=16$.

$$\text{综上, } h(t) = \begin{cases} -t^2+4t+12, & t \leq 2, \\ 16, & 2 < t < 4, \\ -t^2+8t, & t \geq 4. \end{cases}$$

易错警示 求解二次函数在动区间上的最值,应按照动区间与二次函数图象的对称轴的相对位置关系分类讨论后求其最值.

3.2.2 奇偶性

基础必刷

1. C 【解析】因为 $f(x)$ 是奇函数,所以函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称,又函数 $f(x)$ 在 $[2, 8]$ 上单调递减,且最小值为-5,于是 $f(x)$ 在 $[-8, -2]$ 上单调递减,且最大值为5. 故选 C.

2. A 【解析】函数 $f(x)=ax^3+bx-1$ 的定义域为 \mathbf{R} ,令 $g(x)=f(x)+1=ax^3+bx$,则 $g(-x)=a(-x)^3+b(-x)=-g(x)$,所以函数 $g(x)$ 是奇函数,

因此 $g(2\ 024)+g(-2\ 024)=f(2\ 024)+1+f(-2\ 024)+1=0$,而 $f(2\ 024)=5$,所以 $f(-2\ 024)=-7$. 故选 A.

3. C 【解析】对于 A, 函数定义域为 \mathbf{R} , $f(-x)=-(-x)^3=x^3=-f(x)$,则函数 $f(x)$ 为奇函数,但 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,故 A 错误;

对于 B, 函数定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, $f(-x)=-\frac{1}{|x|}=f(x)$,

则函数 $f(x)$ 为偶函数,故 B 错误;

对于 C, 函数定义域为 \mathbf{R} , $f(-x)=-x|-x|=-x|x|=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为奇函数,当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2$,函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,故 C 正确;

对于 D, 函数定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, $f(-x)=-x-\frac{1}{x}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,由对勾函数的性质可得函数在 $(0, 1)$ 上单调递减,在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,故 D 错误.

故选 C.

4. B 【解析】 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{-(x+1)+2}{1+x}=-1+\frac{2}{x+1}$. 对于 A 选

项, $f(x-1)-1=\left[-1+\frac{2}{(x-1)+1}\right]-1=\frac{2}{x}-2$,定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,为非奇非偶函数,不符合题意;对于 B 选项, $f(x-1)+1=\left[-1+\frac{2}{(x-1)+1}\right]+1=\frac{2}{x}$,定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,则函数 $y=\frac{2}{x}$ 为奇函数,符合题意;对于 C 选项, $f(x+1)-1=\left[-1+\frac{2}{(x+1)+1}\right]-1=\frac{2}{x+2}-2$,定义域为 $\{x|x \neq -2\}$,为非奇非偶函数,不符合题意;对于 D 选项, $f(x+1)+1=\left[-1+\frac{2}{(x+1)+1}\right]+1=\frac{2}{x+2}$,定义域为 $\{x|x \neq -2\}$,为非奇非偶函数,不符合题意. 故选 B.

快解 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{-(x+1)+2}{1+x}=-1+\frac{2}{x+1}$. 函数 $f(x)$ 的图象是由 $y=\frac{2}{x}$ 的图象向左平移1个单位长度,再向下平移1个单位长度得到的,则其对称中心为 $(-1, -1)$. 结合选项知 $f(x-1)+1$ 图象的对称中心为 $(0, 0)$,故选 B.

5. C 【解析】因为 $f(x)$ 的图象关于原点对称,所以 $f(-m)=-f(m)$,其中 $f(-m)=(-m+m-3) \cdot [(-m)^2-m+2]$, $f(m)=(m+m-3)(m^2-m+2)$,则 $-3(m^2-m+2)=-(2m-3)(m^2-m+2)$,由于 $m^2-m+2=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ 恒成立,故 $2m-3=3$,解得 $m=3$,则 $f(x)=x(x^2-1)$,是奇函数,符合题意,则 $f(m)=f(3)=3 \times (9-1)=24$. 故选 C.

6. D 【解析】函数 $f(x)=-\frac{4x}{4x^2+1}$ 的定义域为 \mathbf{R} ,定义域关于原点对称,

且 $f(-x)=-\frac{4(-x)}{4(-x)^2+1}=f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为奇函数,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称,选项 A, C 错误;

又 $f(1)=-\frac{4}{5}<0$,所以选项 B 错误.

选项 D 满足以上特征.

故选 D.

7. ABD 【解析】 $\because f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, $\therefore f(0)=0$,故 A 正确.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq -1$,且存在 $x_0 \geq 0$ 使得 $f(x_0)=-1$,则当 $x \leq 0$ 时, $f(-x) \geq -1$, $f(x)=-f(-x) \leq 1$,且当 $x=-x_0$ 时,有 $f(-x_0)=1$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上有最大值1,故 B 正确.

若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,由奇函数在关于原点对称的区间上具有相同的单调性,可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增,故 C 错误.

若当 $x>0$ 时, $f(x)=x^3+3x$,则当 $x<0$ 时, $-x>0$, $f(x)=-f(-x)=-[(-x)^3+3 \times (-x)]=x^3+3x$,故 D 正确.

故选 ABD.

8. ABC 【解析】函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 所以

$$f(x) = f(-x), \text{ 又当 } x \leq 0 \text{ 时, } f(x) = -x^2 - 2x,$$

所以当 $x > 0$ 时, $-x < 0$, 则 $f(x) = f(-x) = -(-x)^2 - 2(-x) = -x^2 + 2x$, 故 D 错误;

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 此时 $f(x)_{\max} = f(-1) = 1$, 由于偶函数的图象关于 y 轴对称, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 此时 $f(x)_{\max} = f(1) = f(-1) = 1$, 故 $f(x)$ 的最大值为 1, 故 A 正确, B 正确;

当 $x \leq 0$ 时, 令 $f(x) = -x^2 - 2x \geq 0$, 解得 $-2 \leq x \leq 0$, 当 $x > 0$ 时, 令 $f(x) = -x^2 + 2x \geq 0$, 解得 $0 < x \leq 2$, 所以 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2, 2]$, 故 C 正确. 故选 ABC.

 9. -2 【解析】因为函数 $f(x)$ 是奇函数, 函数 $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x) + g(x) = x^2 - x + 1$ ①,

所以 $f(-x) + g(-x) = (-x)^2 - (-x) + 1$, 即 $-f(x) + g(x) = x^2 + x + 1$ ②, 联立 ①② 得 $f(x) = -x$, $g(x) = x^2 + 1$, 故 $f(2) = -2$.

 10. $-2x^2 + 4$ 【解析】 \because 函数 $f(x) = (x+a)(bx+2a) = bx^2 + (2a+ab)x + 2a^2$ 是偶函数, $\therefore 2a+ab=0$, 即 $a(b+2)=0$, $\therefore a=0$ 或 $b=-2$. 又函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 4]$, $\therefore b < 0$, 且 $2a^2 = 4$, 即 $a^2 = 2$, $b = -2$. \therefore 该函数的解析式为 $f(x) = -2x^2 + 4$.

 11. $(0, 1]$ 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数, 且在 $[-2, 0]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减, 所以不等式 $f(1+x) < f(2x-1)$ 等价于 $f(|1+x|) < f(|2x-1|)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} |1+x| > |2x-1|, \\ -2 \leq 1+x \leq 2, \\ -2 \leq 2x-1 \leq 2, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < x \leq 1.$$

 12. 【解】(1) 因为 $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} b=0, \\ \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } a=1, b=0,$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

(2) 函数 $f(x)$ 为奇函数, 证明如下:

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 的定义域为 $(-2, 2)$, 关于原点对称,

$$\text{又 } f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 令 $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1} = \frac{x_1x_2^2+x_1-x_1^2x_2-x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} \\ &= \frac{x_1x_2(x_2-x_1) - (x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = \frac{(x_1x_2-1)(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}. \end{aligned}$$

因为 $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, 所以 $x_1x_2 - 1 < 0$, $x_2 - x_1 > 0$, $x_1^2 + 1 > 0$, $x_2^2 + 1 > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增.

$$\text{又 } f(-1) = -\frac{1}{2}, f(1) = \frac{1}{2},$$

所以函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的值域为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

刷易错

易错点 1 判断函数的奇偶性时忽视定义域致误

13. D 【解析】函数 $f(x) = (x+2)\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$ 的定义域满足 $\frac{2-x}{x+2} \geq 0$, 解得 $-2 < x \leq 2$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2]$, 定义域不关于原点对称, 因此函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

易错警示

求解本题的易错之处是忽略函数的定义域, 将

函数化简变形为 $f(x) = (x+2)\sqrt{\frac{2-x}{x+2}} = \sqrt{(x+2)^2 \cdot \frac{2-x}{x+2}} = \sqrt{4-x^2}$, 从而判断出该函数是偶函数. 因此在判断函数的奇偶性时, 化简函数解析式一定要等价变形, 不能扩大或缩小函数的定义域.

易错点 2 求解与奇、偶函数有关的不等式时未进行等价转化致误

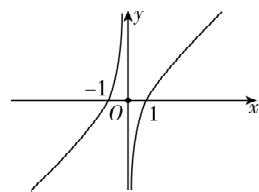
14. A 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(-1) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递增, $f(-1) = -f(1) = 0$, $f(0) = 0$, 作出草图如图所示.

由图象知, $f(2x-1) > 0$ 等价于 $-1 <$

$2x-1 < 0$ 或 $2x-1 > 1$, 解得 $0 < x < \frac{1}{2}$

或 $x > 1$, 所以不等式 $f(2x-1) > 0$ 的解

集为 $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$. 故选 A.



易错警示

求解与奇、偶函数有关的不等式问题, 要考虑奇、偶函数关于原点对称的定义域两侧图象的单调性. 本题的易错之处是只考虑 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的性质, 而忽视 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递增, 造成错解. 为避免此类问题的发生, 可根据函数的奇偶性、单调性作出函数的草图, 根据图象将不等式转化, 脱去“ f ”, 解出即可.

3.3 幂函数

基础必刷

- 1. B** 【解析】对于 A, $y=2x$ 不是幂函数, 故不符合要求;
对于 B, $y=x^2$ 是幂函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 符合要求;
对于 C, $y=\sqrt{2x}$ 中 x 前的系数不为 1, 故 $y=\sqrt{2x}$ 不是幂函数, 不符合要求;
对于 D, $y=\frac{2}{x}=2x^{-1}$ 中 x^{-1} 前的系数不为 1, 故 $y=\frac{2}{x}$ 不是幂函数, 不符合要求. 故选 B.
- 2. C** 【解析】根据幂函数的定义及幂函数的单调性得,

$$\begin{cases} m^2-m-1=1, \\ m^2+m-3>0, \end{cases}$$
 解得 $m=2$. 故选 C.
- 3. A** 【解析】当 $x>1$ 时, 幂函数 $y=x^\alpha$ 的图象自上而下所对应的幂指数 α 逐渐减小, 所以与曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 相应的 α 依次为 $3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -3$. 故选 A.
- 4. C** 【解析】 $a=2^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{1}{3}}$, 因为 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $4>3$, 所以 $4^{\frac{1}{3}}>3^{\frac{1}{3}}$, 即 $a>c$. 因为 $b^{15}=(4^{\frac{1}{5}})^{15}=4^3=64$, $c^{15}=(3^{\frac{1}{3}})^{15}=3^5=243$, 且 $64<243$, 所以 $b^{15}<c^{15}$, 所以 $c>b$, 所以 $b<c<a$. 故选 C.
- 5. C** 【解析】当 $\alpha\leq 0$ 时, 幂函数的图象不过原点, 故 A 错误;
当 $\alpha=1$ 时, 幂函数的图象过第三象限, 故 B 错误;
当 $\alpha=1$, 幂函数为 $y=x$, 是其定义域上的增函数,
当 $\alpha=3$, 幂函数为 $y=x^3$, 是其定义域上的增函数,
当 $\alpha=\frac{1}{2}$, 幂函数为 $y=x^{\frac{1}{2}}$, 是其定义域上的增函数, 故 C 正确;
若幂函数的图象过点 $(\frac{1}{4}, 8)$, 则 $8=(\frac{1}{4})^\alpha$, 解得 $\alpha=-\frac{3}{2}$,
所以幂函数为 $y=x^{-\frac{3}{2}}$, 当 $x=9$ 时, $y=\frac{1}{27}$, 故 D 错误. 故选 C.
- 6. ①③** 【解析】根据幂函数 $y=x^\alpha$ 的性质, 因为幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\alpha>0$, 此时①②③满足.
又因为函数图象关于原点成中心对称, 所以该幂函数为奇函数, 根据奇函数的性质 $f(-x)=-f(x)$, 可知①③满足.
因为 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 所以 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象不关于原点成中心对称, 故② $y=x^{\frac{1}{2}}$ 不满足. 故答案为①③.
- 7. 【解】**(1) 因为 $f(x)$ 是幂函数, 所以 $m^2-3m-3=1$, 即 $m^2-3m-4=0$,
所以 $(m-4)(m+1)=0$, 解得 $m=4$ 或 $m=-1$.

当 $m=4$ 时, $f(x)=x^3$, 定义域为 \mathbf{R} , 此时 $f(-x)=-x^3=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 则 $m=4$ 符合题意; 当 $m=-1$ 时, $f(x)=x^{-2}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称, 此时 $f(-x)=x^{-2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 则 $m=-1$ 不符合题意. 故 $f(x)=x^3$.

(2) 由 (1) 可知 $m=4$, 所以不等式 $(3a-3)^{m-1}<(a^2-a)^{m-1}$, 即不等式 $(3a-3)^3<(a^2-a)^3$, 因为 $y=x^3$ 为 \mathbf{R} 上的增函数, 所以 $3a-3<a^2-a$, 即 $a^2-4a+3>0$,
所以 $(a-1)(a-3)>0$, 解得 $a>3$ 或 $a<1$, 即 a 的取值范围是 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

刷易错

易错点 1 忽视幂函数的定义特征而致误

- 8. A** 【解析】根据幂函数的定义可得 $k=1$.
由函数 $f(x)=k \cdot x^\alpha$ 的图象经过点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,
可得 $\frac{\sqrt{2}}{2}=(\frac{1}{2})^\alpha$, 解得 $\alpha=\frac{1}{2}$, 则 $k-\alpha=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

易错警示 本题的易错之处是忽视幂函数的定义, 不能正确确定 k 的值. 因此确定一个函数为幂函数时, 一定要满足以下三个条件: (1) 幂指数为常数; (2) 底数为自变量; (3) 系数为 1.

易错点 2 求解与幂函数性质有关的解析式时, 忘记检验是否满足性质而致误

- 9. B** 【解析】因为函数 $f(x)=(m^2-m-5)x^{-2m+1}$ 既是幂函数又在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\begin{cases} m^2-m-5=1, \\ -2m+1<0, \end{cases}$ 解得 $m=3$, 代入得 $f(x)=x^{-5}$, 满足题意. 故选 B.
- 10. 4** 【解析】因为 $f(x)=(a^2-7a+13)x^{a-1}$ 为幂函数, 所以 $a^2-7a+13=1$, 解得 $a=3$ 或 $a=4$. 当 $a=3$ 时, 函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 不满足要求; 当 $a=4$ 时, 函数 $f(x)=x^3$ 在定义域 \mathbf{R} 上单调递增, 满足要求. 故 $a=4$.

易错警示

在第 9 题中, 如果只考虑 $m^2-m-5=1$, 解得 $m=-2$ 或 $m=3$, 当 $m=-2$ 时, 函数为 $y=x^5$, 不满足在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 因此应舍去; 在第 10 题中, 当 $a=3$ 时, 函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 不满足要求, 因此也应舍去. 所以涉及含参数的幂函数问题时, 要注意检验是否满足题中幂函数的性质.

易错点 3 不能正确分析幂函数的单调性而致误

- 11. $(-\infty, -1) \cup (\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$** 【解析】 $\because y=x^{m^2-2m-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调

递减, $\therefore m^2 - 2m - 3 < 0$, 解得 $-1 < m < 3$. 又 $m \in \mathbf{Z}$, $\therefore m = 0, 1, 2$.

\therefore 函数图象关于 y 轴对称,

\therefore 只有 $m = 1$ 满足题意.

$$\therefore (a+1)^{-\frac{m}{3}} < (3-2a)^{-\frac{m}{3}}, \text{ 即 } (a+1)^{-\frac{1}{3}} < (3-2a)^{-\frac{1}{3}}.$$

又 $\because y = x^{-\frac{1}{3}}$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上都单调递减,

$\therefore a+1 > 3-2a > 0$ 或 $3-2a < a+1 < 0$ 或 $a+1 < 0 < 3-2a$, 解得 $a < -1$

$$\text{或 } \frac{2}{3} < a < \frac{3}{2}.$$

易错警示 (1) 函数 $y = x^{-\frac{1}{3}}$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上都单调递减, 易误认为在定义域内是减函数从而得出 $a+1 > 3-2a$, 即 $a > \frac{2}{3}$ 的错误结论.

(2) 由 $f(x_1) < f(x_2)$ 得 x_1 与 x_2 的大小关系时, 如果 $f(x)$ 的单调区间不止一个, 那么需要对 x_1, x_2 的范围进行讨论, 这时可借助函数 $y = f(x)$ 的图象, 直观地进行分析, 得出结论.

3.4 函数的应用 (一)

1. B 【解析】设每个月用水量为 x 吨, 费用为 y 元, 则 $y =$

$$\begin{cases} 3x, 0 \leq x \leq 15, \\ 3 \times 15 + 5(x-15), x > 15 \end{cases} = \begin{cases} 3x, 0 \leq x \leq 15, \\ 5x-30, x > 15. \end{cases} \text{ 当 } y = 70 \text{ 时, } x =$$

20, 所以小王 10 月份的实际用水量为 20 吨. 故选 B.

2. C 【解析】设 $f(a)$ 为 a 与其前三个月的市场收购价格之差的平方和, 则 $f(a) = (a-71)^2 + (a-72)^2 + (a-70)^2 = 3(a-71)^2 +$

2. 当 $a = 71$ 时, $f(a)$ 最小, 所以 7 月份该农产品的市场收购价格应为 71 元/担. 故选 C.

3. D 【解析】设某地的耕地面积每年减少 $x\%$, 因为在最近 50

年内减少了 20%, 所以 $(1-x\%)^{50} = 1-20\%$, 所以 $(1-x\%)^5 =$

$0.8^{\frac{1}{10}}$, 由题意得 2029 年的耕地面积为 $m(1-x\%)^5$, 即

$0.8^{\frac{1}{10}}m$. 故选 D.

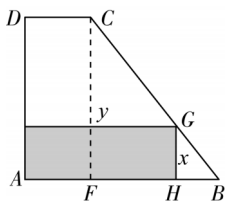
4. A 【解析】如图, 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F , 因为 $GH \perp AB$, 所

以 $GH \parallel CF$, 所以由平行线的性质可得 $\frac{GH}{CF} = \frac{BH}{FB}$, 即 $\frac{x}{20} =$

$\frac{24-y}{24-8}$, 即 $y = 24 - \frac{4x}{5}$ ($0 < x \leq 20$), 所以矩形面积 $S = xy =$

$x \left(24 - \frac{4x}{5} \right) = -\frac{4x^2}{5} + 24x = -\frac{4}{5}(x-15)^2 + 180$ ($0 < x \leq 20$), 所以

当 $x = 15$ 时, S 最大, 此时 $y = 24 - \frac{4}{5} \times 15 = 12$, 故选 A.



5. 10 【解析】由题意, 设该厂日获利为 y 元, 则

$$y = (160-2x)x - (100+30x) = -2x^2 + 130x - 100, x \in \mathbf{N}^*.$$

当工厂日获利不少于 1 000 元时, $-2x^2 + 130x - 100 \geq 1\,000$,

$$\text{即 } x^2 - 65x + 550 \leq 0 \Leftrightarrow (x-10)(x-55) \leq 0,$$

解得 $10 \leq x \leq 55, x \in \mathbf{N}^*$.

故该厂日获利不少于 1 000 元时, 日产量最少是 10 件.

6. 【解】(1) 由题意得, 第 10 天每件销售价格为 $\varphi(10)$ 元, 第 10

天的销售量为 50 件,

$$\text{所以 } 50 \times \varphi(10) = 50 \times \left(10 + \frac{k}{10} \right) = 505, \text{ 得 } k = 1.$$

(2) 由表格数据知日销售量 $g(x)$ 随时间第 x 天的增长先增后减,

而① $g(x) = ax+b$, ② $g(x) = \frac{a}{x} - b$ 两函数都是单调函数, 显然

①②不符合题意,

而③ $g(x) = a|x-20|+b$ 满足题意, 故选③.

$$\text{则 } \begin{cases} a|15-20|+b=55, \\ a|20-20|+b=60, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=-1, \\ b=60, \end{cases} \text{ 则 } g(x) = -|x-20|+60.$$

综上, $g(x) = -|x-20|+60$, 且定义域为 $\{x \in \mathbf{N}^* | 1 \leq x \leq 30\}$.

(3) 由(1)(2)知, $\varphi(x) = 10 + \frac{1}{x}$, $g(x) = -|x-20|+60, 1 \leq x \leq 30$,

$$\text{则 } f(x) = g(x) \varphi(x) = (60 - |x-20|) \cdot$$

$$\left(10 + \frac{1}{x} \right) = \begin{cases} (x+40) \left(10 + \frac{1}{x} \right), 1 \leq x \leq 20, \\ (80-x) \left(10 + \frac{1}{x} \right), 20 < x \leq 30, \end{cases}$$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 401 + 10x + \frac{40}{x}, 1 \leq x \leq 20, \\ 799 - 10x + \frac{80}{x}, 20 < x \leq 30, \end{cases}$$

当 $1 \leq x \leq 20$ 时, $f(x) = 401 + 10x + \frac{40}{x} \geq 401 + 2\sqrt{10x \cdot \frac{40}{x}} =$

441, 当且仅当 $10x = \frac{40}{x}$, 即 $x = 2$ 时取等号, 此时最小值

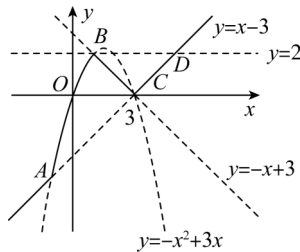
为 441;

当 $20 < x \leq 30$ 时, $f(x) = 799 - 10x + \frac{80}{x}$ 在 $(20, 30]$ 上单调递减,

此时最小值为 $f(30) = 799 - 300 + \frac{8}{3} = 501 \frac{2}{3}$,

显然 $501 \frac{2}{3} > 441$, 所以 $f(x)$ 的最小值为 441.

专题 函数的性质及应用



1. A 【解析】由 $f(x+2)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称, 即 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-1)=f(1)$. 因为 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上单调递减, 所以 $f(-1)=f(1)>f(2)>f(3)$. 故选 A.

2. B 【解析】因为函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{x}, & x<-1, \\ x^2-2ax+5, & x\geq-1 \end{cases}$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 所以

$$\begin{cases} a<0, \\ a\leq-1, \\ -a\leq 1+2a+5, \end{cases} \quad \text{解得 } -2\leq a\leq-1, \text{ 即实数 } a \text{ 的取值范围是 } [-2, -1]. \text{ 故选 B.}$$

3. D 【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $F(x)-5=af(x)+bx$ 也为奇函数.

$F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值 12, 所以 $F(x)-5=af(x)+bx$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值 7,

所以 $F(x)-5$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有最小值 -7, 可得 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有最小值 -2. 故选 D.

4. C 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $g(x)=xf(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(0)=0$,

又 $g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$, 所以 $g(x)$ 是偶函数.

又 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, 所以当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)=0$,

设 $0<x_1<x_2$, 则 $0<f(x_1)<f(x_2)$, 所以 $x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$, 即 $g(x_1)<g(x_2)$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(1)<g(2)<g(3)$, 又 $g(2)=g(-2)$,

所以 $g(1)<g(-2)<g(3)$, 即 $b<a<c$. 故选 C.

5. ACD 【解析】由题意可设 $f(x)=x^a$, 由 $f(2)=4$, 得 $2^a=4$, 解得 $a=2$, 则 $f(x)=x^2$.

对于 A, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x)=(-x)^2=f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数, A 正确;

对于 B, $-3<1$, 此时 $f(-3)=9>1=f(1)$, B 错误;

对于 C, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{4}\leq\frac{2x_1^2+2x_2^2}{4}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 当且仅当 $x_1=x_2$ 时取等号, C 正确;

对于 D, $f(x_1)+f(x_2)=x_1^2+x_2^2=1$, 由选项 C 知, $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\leq\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=\frac{1}{2}$, 解得 $-\sqrt{2}\leq x_1+x_2\leq\sqrt{2}$, D 正确. 故选 ACD.

6. AC 【解析】函数 $f(x)$ 的图象如图中实线部分所示, 其中 $A(-1, -4)$, $B(1, 2)$, $C(3, 0)$, $D(5, 2)$, 由图可知若 $f(x)$ 在 $(0, m)$ 上有最大值, 则在区间 $(0, m)$ 上一定包含点 B, 所以 $m>1$, 因此在 $(0, m)$ 上的最大值为 2, 所以 m 的取值范围为 $(1, 5]$. 故选 AC.

7. $\left[\frac{7-\sqrt{41}}{4}, 1\right]$ 【解析】由题意知, 当 $x\in(0, 2]$ 时, $f(x)=$

$$\begin{cases} x^2-x, & 0<x<1, \\ \frac{1}{x}, & 1\leq x\leq 2, \end{cases} \quad \text{可得 } f(x)\in\left[-\frac{1}{4}, 0\right)\cup\left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

又由 $f(x+2)=2f(x)$, 可得当 $x\in(2, 4]$ 时, $f(x)\in\left[-\frac{1}{2}, 0\right)\cup[1, 2]$,

当 $x\in(0, 4]$ 时, $t^2-\frac{7t}{2}\leq f(x)\leq 3-t$ 恒成立,

$$\text{等价于 } \begin{cases} t^2-\frac{7}{2}t\leq f(x)_{\min}, \\ f(x)_{\max}\leq 3-t, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} t^2-\frac{7}{2}t\leq -\frac{1}{2}, \\ 3-t\geq 2, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{7-\sqrt{41}}{4}\leq t\leq 1,$$

即实数 t 的取值范围是 $\left[\frac{7-\sqrt{41}}{4}, 1\right]$.

8. 【解】(1) 函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 证明如下:

$$\forall x\in[-1, 1], \text{ 都有 } -x\in[-1, 1], \text{ 因为 } f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数.

(2) $g(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 证明如下:

对于任意 $x_1, x_2\in(0, 1]$ 且 $x_1<x_2$,

$$g(x_1)-g(x_2)=x_1+\frac{1}{x_1}-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=(x_1-x_2)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right).$$

因为 $0<x_1<x_2\leq 1$, 所以 $x_1-x_2<0$, $0<x_1x_2<1$, 所以 $\frac{1}{x_1x_2}>1$, 所以

$$1-\frac{1}{x_1x_2}<0,$$

所以 $g(x_1)-g(x_2)>0$, 即 $g(x_1)>g(x_2)$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减.

(3) 因为 $\forall x\in[-1, 0)\cup(0, 1]$, 都有 $-x\in[-1, 0)\cup(0, 1]$,

$g(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-g(x)$, 所以 $g(x)$ 在 $[-1, 0)\cup(0, 1]$ 上为奇函数,

由(2)知 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 所以 $g(x)$ 在 $[-1, 0)$ 和 $(0, 1]$ 上单调递减.

当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{1}{x}+x} = \frac{1}{g(x)}$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 0)$

和 $(0, 1]$ 上均单调递增,

又 $f(x)$ 的图象在 $[-1, 1]$ 上连续不间断, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$

上单调递增.

由题意, 不等式 $f(2t) + f(t-1) > 0$ 可化为 $f(2t) > f(1-t)$,

$$\text{所以} \begin{cases} -1 \leq 2t \leq 1, \\ -1 \leq 1-t \leq 1, \text{解得} \frac{1}{3} < t \leq \frac{1}{2}. \\ 2t > 1-t, \end{cases}$$

故原不等式的解集为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

第三章全章训练

1. D 【解析】设 $f(x) = x^a$, 因为幂函数的图象过点 $(8, 2\sqrt{2})$, 所以 $2\sqrt{2} = 8^a$, 即 $2^{\frac{3}{2}} = 2^{3a}$, 所以 $a = \frac{1}{2}$, 即 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, 所以 $f(3) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. 故选 D.

2. A 【解析】由 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 得 $f(-\sqrt{7}) = f(\sqrt{7})$, $f(-3) = f(3)$.

又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(\sqrt{7}) < f(3) < f(\pi)$, 所以 $f(\pi) > f(-3) > f(-\sqrt{7})$. 故选 A.

3. C 【解析】由 $2x^2 + x - 3 \geq 0$, 解得 $x \geq 1$ 或 $x \leq -\frac{3}{2}$,

所以函数 $f(x) = \sqrt{2x^2 + x - 3}$ 的定义域为 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

设 $t = 2x^2 + x - 3$, 则 $y = \sqrt{t}$,

函数 $t = 2x^2 + x - 3$ 图象的对称轴为直线 $x = -\frac{1}{4}$,

所以函数 $t = 2x^2 + x - 3$ 在区间 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减, 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $t \geq 0$,

又函数 $y = \sqrt{t}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[1, +\infty)$. 故选 C.

4. A 【解析】由题中函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图象可知, 函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 均为偶函数, 所以函数 $y = f(x)g(x)$ 为偶函数, 排除 B, C 选项.

又因为当 $x > 2$ 时, $f(x) < 0$, $g(x) < 0$, 所以 $f(x)g(x) > 0$ 恒成立, 只有 A 选项符合要求. 故选 A.

5. D 【解析】因为 $g(x) = f(x+a) - b$ 为奇函数, $f(x) = x^3 - 6x^2$,

所以 $f(x+a) - b + f(-x+a) - b = 0$,

所以 $(x+a)^3 - 6(x+a)^2 - b + (-x+a)^3 - 6(-x+a)^2 - b = 0$,

所以 $(x+a)^3 - 6(x+a)^2 - b - (x-a)^3 - 6(x-a)^2 - b = 0$,

所以 $(6a-12)x^2 + 2a^3 - 12a^2 - 2b = 0$,

$$\text{所以} \begin{cases} 6a-12=0, \\ 2a^3-12a^2-2b=0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=-16. \end{cases} \text{ 故选 D.}$$

6. C 【解析】由题意知, 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增. 又 $f(x+1)$ 是偶函数, 即 $f(x+1) = f(-x+1)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减.

又 $f(m+1) \geq f(2m)$, 所以 $|m+1-1| \geq |2m-1|$, 不等式两边平方后解得 $\frac{1}{3} \leq m \leq 1$. 故选 C.

7. D 【解析】 \because 函数 $f(x) = x^2 - 2x$ 的图象是开口向上的抛物线, 且关于直线 $x = 1$ 对称, \therefore 当 $x \in [-1, 2]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = -1$, 最大值为 $f(-1) = 3$, 可得 $f(x_1) \in [-1, 3]$.

又 $\because g(x) = ax + 2$ ($a > 0$) 在 $[-1, 2]$ 上单调递增, 且当 $x \in [-1, 2]$ 时, $g(x) \in [g(-1), g(2)]$, 可得 $g(x_2) \in [2-a, 2a+2]$. \therefore 对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$, 总存在 $x_2 \in [-1, 2]$, 使得

$$f(x_1) = g(x_2), \therefore \begin{cases} 2-a \leq -1, \\ 2a+2 \geq 3, \text{解得} a \geq 3. \text{ 故选 D.} \\ a > 0, \end{cases}$$

8. C 【解析】由“隐对称点”的定义可知函数 $f(x)$ 的图象上存在关于原点对称的点,

设 $g(x)$ 的图象与 $f(x) = x^2 + 4x$ ($x > 0$) 的图象关于原点对称, 令 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 所以 $f(-x) = x^2 - 4x$, 所以 $g(x) = -f(-x) = -x^2 + 4x$ ($x < 0$),

因为 $f(0) = 2 \neq -f(0)$,

所以函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x > 0, \\ mx + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象存在“隐对称点”等价于 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图象在 $(-\infty, 0)$ 上有交点, 即方程 $mx + 2 = -x^2 + 4x$ ($x < 0$) 有解, 则 $m = -x - \frac{2}{x} + 4$.

又 $-x - \frac{2}{x} + 4 \geq 2\sqrt{-x \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)} + 4 = 2\sqrt{2} + 4$, 当且仅当 $-x = -\frac{2}{x}$ ($x < 0$), 即 $x = -\sqrt{2}$ 时, 等号成立,

所以 $m \geq 2\sqrt{2} + 4$. 故选 C.

9. BC 【解析】函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 又 $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$, 所以函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 为奇

函数, A 不符合题意;

函数 $f(x) = |x|$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, 所以函数 $f(x) = |x|$ 为偶函数, 且当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = |x| = x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, B 符合题意;

函数 $f(x) = x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, 所以函数 $f(x) = x^2$ 为偶函数, 且 $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, C 符合题意.

因为函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$, 不关于原点对称, 所以函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 无奇偶性, D 不符合题意. 故选 BC.

10. ACD 【解析】A 选项, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4$,

故当 $0 \leq x < 2$ 时, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \geq 2$ 时, $f(x)$ 单调递减, 又 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 所以当 $x \leq -2$ 时, $f(x)$ 单调递增, 综上, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2]$ 和 $[0, 2]$, A 正确;

B 选项, 由 A 选项可知, 当 $x \geq 2$ 时, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(-\pi) = f(\pi) > f(5)$, B 错误;

C 选项, 由 A 选项可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, -2]$ 和 $[0, 2]$ 上单调递增, 在 $(-2, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

故当 $x = -2$ 和 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 最大值为 $f(2) = -(2-2)^2 + 4 = 4$, C 正确;

D 选项, 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 故 $f(x) = f(-x) = -4x - (-x)^2 = -4x - x^2$, D 正确.

故选 ACD.

11. ABC 【解析】因为函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $P(a, b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x+a) - b$ 为奇函数, 所以 $f(a-x) - b = -[f(a+x) - b]$, 可得 $f(a-x) + f(a+x) = 2b$.

对于 A 选项, 因为 $f(x) = \frac{x}{x-1}$,

$$\text{所以 } f(1-x) + f(1+x) = \frac{1-x}{1-x-1} + \frac{1+x}{1+x-1} = \frac{x-1}{x} + \frac{x+1}{x} = 2,$$

所以函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 图象的对称中心是点 $(1, 1)$, A 正确;

对于 B 选项, 因为 $f(x) = x^3 + 3x^2$, 所以 $f(-1-x) = (-1-x)^3 + 3(-1-x)^2 = -1-3x-3x^2-x^3+3+6x+3x^2 = -x^3+3x+2$, $f(-1+x) = (-1+x)^3 + 3(-1+x)^2 = x^3-3x^2+3x-1+3x^2-6x+3 = x^3-3x+2$, 所以 $f(-1-x) + f(-1+x) = 4$, 所以函数 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 图象的对称中心是点 $(-1, 2)$, B 正确;

若函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 成轴对称图形,

在函数 $y = f(x)$ 的图象上任取一点 (x, y) ,

则该点关于直线 $x = a$ 的对称点 $(2a-x, y)$ 在函数 $y = f(x)$ 的图象上, 所以 $f(2a-x) = f(x)$,

用 $a+x$ 替代等式 $f(2a-x) = f(x)$ 中的 x 可得 $f(a+x) = f(2a-(a+x)) = f(a-x)$,

此时函数 $f(a+x)$ 为偶函数,

所以函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 成轴对称图形的充要条件为函数 $y = f(a+x)$ 为偶函数, C 正确;

对于 D 选项, 结合 C 选项可知, 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 成轴对称图形的充要条件是函数 $y = f(-2+x)$ 为偶函数, D 错误.

故选 ABC.

方法总结 利用函数图象的对称性求参数, 可利用以下结论来转化:

① 函数 $f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称, 则 $f(x) + f(2a-x) = 2b$;

② 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称, 则 $f(x) = f(2a-x)$.

12. $x^2 + 1$ (答案不唯一) 【解析】由题设可知, $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} , 值域为 $[1, +\infty)$ 的偶函数, 所以 $f(x) = x^2 + 1$ 满足.

13. $\begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0, \\ x^2 - 4x, & x < 0 \end{cases}$ 【解析】因为 $f(\sqrt{x}) = x + 4\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x}, \sqrt{x} \geq 0$,

所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 4x$,

因为 $f(x)$ 是定义域在 \mathbf{R} 上的偶函数,

所以当 $x < 0$ 时, $-x > 0, f(x) = f(-x) = (-x)^2 + 4(-x) = x^2 - 4x$,

所以函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的解析式为 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0, \\ x^2 - 4x, & x < 0. \end{cases}$

14. $\{x | -3 < x \leq -2 \text{ 或 } -1 < x < 0 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$ 【解析】将不等式

$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ 转化为 $f(x)g(x) \geq 0$ 且 $g(x) \neq 0$. 由题图可知, 在

$[0, 3]$ 上满足此不等式的解集为 $\{x | 1 < x \leq 2\}$.

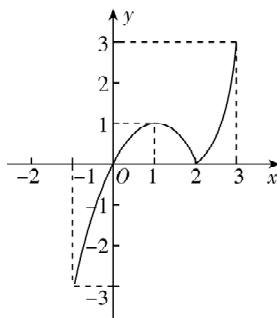
$\because y = f(x)$ 是定义在 $[-3, 3]$ 上的偶函数, $y = g(x)$ 是定义在 $[-3, 3]$ 上的奇函数, $\therefore f(x)g(x)$ 是奇函数, 故在 $[-3, 0)$ 上, 满足不等式的解集为 $\{x | -3 < x \leq -2 \text{ 或 } -1 < x < 0\}$.

故不等式 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ 在 $[-3, 3]$ 上的解集是 $\{x | -3 < x \leq -2 \text{ 或 } -1 < x < 0 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$.

15. 【解】(1) 因为 $f(x) = x|x-2|, x \in \mathbf{R}$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 2, \\ x^2 - 2x, & x > 2. \end{cases}$$

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图象如图所示.



(3) 由 $f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图象, 可得 $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上的单调递增区间为 $[-1, 1]$, $(2, 3]$, 单调递减区间为 $[1, 2]$; $f(x)$ 的最大值为 3, 最小值为 -3.

16. 【解】(1) $f(x) - 2f(-x) = 3x + 2$ ①,

将 x 换成 $-x$ 得 $f(-x) - 2f(x) = -3x + 2$ ②,

② $\times 2$ + ①, 得 $-3f(x) = -3x + 6$,

故 $f(x) = x - 2$.

(2) $g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 理由如下:

$g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$, 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2$,

则 $g(x_1) - g(x_2) = x_1 - 2 - \frac{1}{x_1} - x_2 + 2 + \frac{1}{x_2} = x_1 - x_2 + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = (x_1 - x_2) \left(1 + \frac{1}{x_1 x_2} \right)$,

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $x_1 - x_2 < 0$, $1 + \frac{1}{x_1 x_2} > 0$,

所以 $g(x_1) - g(x_2) = (x_1 - x_2) \left(1 + \frac{1}{x_1 x_2} \right) < 0$, 即 $g(x_1) < g(x_2)$,

所以 $g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

17. 【解】(1) 根据题意知

$f(x) = 21P(x) - 16x - (200 + 5x)$,

则 $f(x) = \begin{cases} 84(x^2 + 2) - 16x - (200 + 5x), & 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{756x}{x+1} - 16x - (200 + 5x), & 2 < x \leq 6, \end{cases}$

整理得 $f(x) = \begin{cases} 84x^2 - 21x - 32, & 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{756x}{x+1} - 21x - 200, & 2 < x \leq 6. \end{cases}$

(2) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 84x^2 - 21x - 32$,

由二次函数图象可知当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(2) = 262$;

当 $2 < x \leq 6$ 时, $f(x) = \frac{756x}{x+1} - 21x - 200 = \frac{756(x+1) - 756}{x+1} -$

$21(x+1) - 179 = 577 - \left[\frac{756}{x+1} + 21(x+1) \right] \leq 577 -$

$2\sqrt{\frac{756}{x+1} \cdot 21(x+1)} = 577 - 2 \times 126 = 325$,

当且仅当 $\frac{756}{x+1} = 21(x+1)$, 即 $x = 5$ 时等号成立.

$\therefore f(2) < f(5)$, $\therefore f(x)$ 的最大值是 $f(5) = 325$,

\therefore 当单株施肥量为 5 千克时, 该果树的单株利润最大, 最大利润是 325 元.

18. 【解】(1) 因为 $f(x)$ 为幂函数, 所以 $m^2 - m - 1 = 1$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 2$,

故 $f(x) = x^2$ 或 $f(x) = x^{-1}$.

(2) 当 $f(x) = x^2$ 时, $f(x)$ 的图象经过坐标原点, 不满足要求.

当 $f(x) = x^{-1}$ 时, $f(x)$ 的图象不经过坐标原点, 所以 $f(x) = x^{-1}$, $f(x)$ 为奇函数. 证明如下:

$f(x) = x^{-1}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称,

$f(-x) = (-x)^{-1} = -x^{-1} = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 若 $f(x)$ 的图象经过坐标原点, 则 $f(x) = x^2$,

由 $f(2-x) > f(x)$ 可得 $(2-x)^2 > x^2$, 解得 $x < 1$,

所以原不等式的解集为 $(-\infty, 1)$.

19. 【解】(1) 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 所以 $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}$,

由 $f(x)$ 为偶函数知 $f(x) = f(-x) = \frac{x^2}{1-x}$,

所以当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

(2) $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 有

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1^2}{1+x_1} - \frac{x_2^2}{1+x_2} = \frac{x_1^2 + x_1^2 \cdot x_2 - x_2^2 - x_2^2 \cdot x_1}{(1+x_1)(1+x_2)} \\ &= \frac{(x_1^2 - x_2^2) + (x_1^2 \cdot x_2 - x_2^2 \cdot x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + x_1 x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}, \end{aligned}$$

根据 $x_2 > x_1 \geq 0$, 可得 $1+x_1 > 0$, $1+x_2 > 0$, $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 + x_2 + x_1 x_2 > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 由函数 $f(x)$ 为偶函数知 $f(ax-1) < f((a-1)x)$ 等价于 $f(|ax-1|) < f(|(a-1)x|)$,

又由 (2) 知函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $|ax-1| < |(a-1)x|$, 所以 $|ax-1|^2 < |(a-1)x|^2$,

即 $(x-1)[(2a-1)x-1] < 0$.

(i) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式可化为 $x-1 > 0$, 解得 $x > 1$,

此时原不等式解集为 $(1, +\infty)$;

(ii) 当 $a < \frac{1}{2}$ 时, $2a-1 < 0$, 令 $(x-1)[(2a-1)x-1] = 0$, 得 $x_1 =$

$1, x_2 = \frac{1}{2a-1}, x_1 > x_2$,

此时原不等式解集为 $(-\infty, \frac{1}{2a-1}) \cup (1, +\infty)$;

(iii) 当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $0 < 2a-1 < 1$, 令 $(x-1)[(2a-1)x-1] =$

0 , 得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2a-1}, x_1 < x_2$,

此时原不等式解集为 $\left(1, \frac{1}{2a-1}\right)$.

综上, 当 $a < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{2a-1}\right) \cup (1, +\infty)$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 原不等式解集为 $(1, +\infty)$;

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, 原不等式解集为 $\left(1, \frac{1}{2a-1}\right)$.

专练 1 新定义、新情境专练

1. C 【解析】对于①, 设集合 $A = \{0\}$, 显然 $0+0=0$, 符合性质一, 同时也符合性质二, 因此集合 $A = \{0\}$ 是一个“群”, 但它是有限集, 故①不正确.

对于②, 根据“群”的性质, 由 $b \in A$ 可得 $-b \in A$, 因此可得 $a-b \in A$, 故②正确.

对于③, 根据性质一和性质二, 可知 $A \cap B$ 中必定有一个元素为 0, 设 $A \cap B = C$, 则 C 一定不为空集. 若 $c \in C$, 则一定有 $c \in A, c \in B$, 因为 A, B 都是“群”, 所以 $-c \in A, -c \in B$, 因此 $-c \in C$, 此时 $c - c = 0 \in C$. 若 $d \in C$, 则一定有 $d \in A, d \in B$, 则 $c+d \in A, c+d \in B$, 所以 $c+d \in C$, 所以集合 C 为一个“群”, 故③正确.

故选 C.

2. D 【解析】由题意知, $A \odot B = \{m | m = x - y, x \in A, y \in B\}$, 又非空集合 A 和 $B, A \cup B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 若 $A \odot B \subseteq B$, 则当 B 中有一个元素时, $B = \{1\}, A = \{2\}; B = \{2\}, A = \{4\}$. 当 B 中有两个元素时, $B = \{1, 2\}, A = \{3\}; B = \{1, 3\}, A = \{4\}; B = \{1, 4\}, A = \{5\}; B = \{2, 3\}, A = \{5\}$. 当 B 中有三个元素时, $B = \{1, 2, 3\}, A = \{4\}$. 当 B 中有四个元素时, $B = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{5\}$. 当 B 中有五个元素时, 集合 A 不存在.

所以满足条件的不同的 B 的个数为 8, 故选 D.

3. 47 【解析】当 $n=5$ 时, $S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 含有一个元素的奇子集为 $\{1\}, \{3\}, \{5\}$, 含有两个元素的奇子集为 $\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}$, 含有三个元素的奇子集为 $\{1, 3, 5\}$, 故所有奇子集的容量之和为 $1+3+5+1 \times 3+1 \times 5+3 \times 5+1 \times 3 \times 5=47$.

4. 【解】(1) $y = -2x+3$, 令 $x=0$, 解得 $y=3$, 令 $x=1$, 解得 $y=1$, 故 $P \cap S = \{(0, 3), (1, 1)\}$.
 $y = -x^2+3$, 令 $x=0$, 解得 $y=3$, 令 $x=1$, 解得 $y=2$, 故 $Q \cap S = \{(0, 3), (1, 2)\}$.
 (2) $(P \cap S) \cup (Q \cap S) = \{(0, 3), (1, 1), (1, 2)\}$.

5. B 【解析】因为 $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x} = \frac{4}{2x} + \frac{9}{1-2x}$, 又 $0 < x < \frac{1}{2}$, 所以由权方和不等式可得 $\frac{4}{2x} + \frac{9}{1-2x} \geq \frac{(2+3)^2}{2x+1-2x} = 25$, 当且仅当 $\frac{2}{2x} = \frac{3}{1-2x}$, 即 $x = \frac{1}{5}$ 时等号成立. 故选 B.

6. BCD 【解析】对于 A, $\because a > b > 0, m > 0$,

$$\therefore \frac{b+m}{a+m} - \frac{b}{a} = \frac{m(a-b)}{a(a+m)} > 0, \therefore \frac{b+m}{a+m} > \frac{b}{a}, \text{故 A 错误.}$$

对于 B, $\because b > a > 0, m > 0$,

$$\therefore \frac{b+m}{a+m} - \frac{b}{a} = \frac{m(a-b)}{a(a+m)} < 0, \therefore \frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m}, \text{故 B 正确.}$$

对于 C, $\because a > b > 0, c > d > 0$,

$$\therefore a-b > 0, c-d > 0,$$

$$\therefore \frac{b+c}{a+c} - \frac{b+d}{a+d} = \frac{(b+c)(a+d) - (b+d)(a+c)}{(a+c)(a+d)} = \frac{(a-b)(c-d)}{(a+c)(a+d)} > 0,$$

$$\therefore \frac{b+d}{a+d} < \frac{b+c}{a+c}, \text{故 C 正确.}$$

对于 D, $\because 0 < 1+a < 1+a+b, 0 < 1+b < 1+a+b$,

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{a}{1+a+b}, \frac{b}{1+b} > \frac{b}{1+a+b},$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b}, \text{故 D 正确.}$$

故选 BCD.

7. 6 【解析】不妨令 $b=6$, 则 $a+c=14$,

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]} \\ = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 c^2 - [(c+a)^2 - 2ac - b^2]^2},$$

$$\text{代入数据得 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \sqrt{[(2ac)^2 - (160 - 2ac)^2]} = \frac{1}{4} \sqrt{160(4ac - 160)},$$

由基本不等式得, $14 = a+c \geq 2\sqrt{ac}$, 所以 $4ac \leq 196$, 可得 $S_{\triangle ABC} \leq 6\sqrt{10}$, 当且仅当 $a=c=7$ 时取等号, 所以该三角形面积 S 的最大值为 $6\sqrt{10} \text{ cm}^2$.

8. D 【解析】A: 当 $f(x) = -1$ 时, $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = -1 < 0$, 因此 $f(x) = -1$ 不是“理想函数”, 故 A 错误.

B: 当 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 时, $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 不是